



घन और घनमूल

(Cube and Cube Roots)

अध्याय के मुख्य बिंदु

- ◆ घन ◆ पूर्ण घन ◆ पूर्ण घन की जाँच ◆ संख्याओं के घन के गुणधर्म ◆ घनमूल ◆ अभाज्य गुणनखंड विधि से किसी पूर्ण घन का घनमूल ज्ञात करना
- ◆ ऋणात्मक पूर्ण घन का घनमूल ◆ पूर्णांकों के गुणनफल का घनमूल ◆ परिमेय संख्याओं का घन ◆ परिमेय संख्याओं का घनमूल।

घन (Cube)

जब किसी संख्या में उसी संख्या से तीन बार गुणा करते हैं, तो जो गुणनफल प्राप्त होता है; वह गुणनफल उस संख्या का **घन** कहलाता है; जैसे-

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

संख्याओं 8, 27 तथा 64 को क्रमशः 2, 3 तथा 4 का घन कहते हैं।

पूर्ण घन (Perfect Cube)

प्राकृत संख्या n को एक पूर्ण घन कहते हैं। यदि x एक ऐसी प्राकृत संख्या हो तो,

$$n = x \times x \times x = x^3$$

संख्याएँ 1, 8, 27, 64 सभी पूर्ण घन हैं।

पूर्ण घन की जाँच

यह जाँच करने के लिए कि दी हुई संख्या पूर्ण घन है या नहीं, इसके लिए हम निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाते हैं-

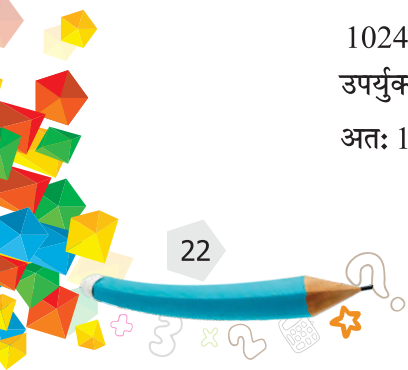
- दी हुई संख्या के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए।
- समान अभाज्य गुणनखंडों के तीन-तीन गुणनखंडों का समूह बनाइए।
- यदि समूह बनाने के बाद कोई गुणनखंड शेष बचता है, तो दी गई संख्या एक पूर्ण घन नहीं है।

उदाहरण 1 : क्या 27000 पूर्ण घन है?

हल : 27000 के गुणनखंड करने पर,
 $27000 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$
 उपर्युक्त गुणनखंडों में तीन के समूह बनाने पर कोई भी गुणनखंड शेष नहीं बचा है।
 अतः 27000 एक पूर्ण घन है। उत्तर

उदाहरण 2 : क्या 1024 पूर्ण घन है?

हल : 1024 के गुणनखंड करने पर,
 $1024 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
 उपर्युक्त गुणनखंडों में तीन के समूह बनाने पर 2 शेष बचता है।
 अतः 1024 एक पूर्ण घन नहीं है। उत्तर





उदाहरण 3 : वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 35721 को गुणा करने पर गुणनखंड एक पूर्ण घन बन जाए।

हल : 35721 के अभाज्य गुणनखंड करने पर,
 $35721 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

उपर्युक्त गुणनखंडों में तीन के समूह बनाने पर 7×7 के गुणनखंड शेष बचते हैं।

अतः उपर्युक्त गुणनखंडों में 7 की गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण घन बन जाएगा।

उत्तर

उदाहरण 4 : वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 1600 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन बन जाए।

हल : 1600 के अभाज्य गुणनखंड करने पर,
 $1600 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

उपर्युक्त गुणनखंडों में तीन के समूह बनाने पर 5×5 के गुणनखंड शेष बचते हैं।

अतः पूर्ण घन बनाने के लिए 25 से भाग करें, तो भागफल एक पूर्ण घन होगा।

उत्तर

संख्याओं के घन के गुणधर्म (Properties of Cubes of Numbers)

1. सभी सम प्राकृत संख्याओं के घन सम होते हैं।

उदाहरणार्थ- $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$

6 का घन = 216, जो एक सम संख्या है।

2. सभी विषम प्राकृत संख्याओं के घन विषम होते हैं।

उदाहरणार्थ- $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

5 का घन 125, जो एक विषम संख्या है।

3. किसी ऋणात्मक पूर्णांक का घन ऋणात्मक होता है।

उदाहरणार्थ- $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

4. किसी परिमेय संख्या का घन उसके अंश के घन को हर के घन से भाग देने पर प्राप्त होता है।

उदाहरणार्थ- $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3}$



1. निम्नलिखित संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए-

5, 11, 21, 100, 300

2. निम्नलिखित संख्याओं में कौन-सी संख्याएँ पूर्ण घन हैं?

64, 216, 243, 1728, 106480

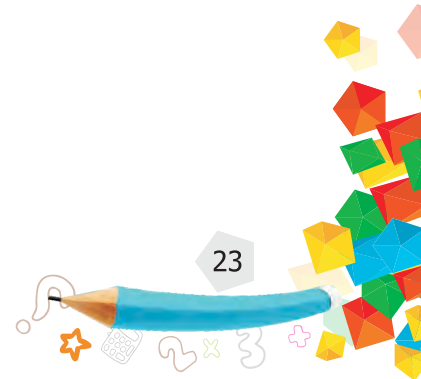
3. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 392 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन हो जाए।

4. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 8640 को भाग करने पर भागफल एक पूर्ण घन हो जाए।

5. 1 से 20 तक की सभी प्राकृत संख्याओं के घन लिखिए और निम्नलिखित कथनों की जाँच कीजिए-

(क) सभी सम प्राकृत संख्याओं के घन सम होते हैं।

(ख) सभी विषम प्राकृत संख्याओं के घन विषम होते हैं।





घनमूल (Cube Roots)

कोई प्राकृत संख्या m, n का घनमूल है, यदि $n = m^3$

यदि 2 का घन 8 है, तो इसे दूसरे शब्दों में इस प्रकार कहा जा सकता है कि 8 का घनमूल 2 है। किसी संख्या के घनमूल को चिह्न ' $\sqrt[3]{\quad}$ ' द्वारा दर्शाया जाता है।

उदाहरणार्थ- $\sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[3]{27} = 3$ इत्यादि।

अभाज्य गुणनखंड विधि से किसी पूर्ण घन का घनमूल ज्ञात करना

(To find the Cube Root of a Perfect Cube by Prime Factorization Method)

इस विधि में निम्नलिखित पदों का प्रयोग करते हैं-

- (क) दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखंड कीजिए।
- (ख) इन गुणनखंडों में तीन-तीन के एक प्रकार के गुणनखंडों का समूह बनाइए।
- (ग) प्रत्येक समूह में से एक संख्या लेकर उनका गुणनफल ज्ञात करते हैं।
- (घ) यह गुणनफल ही दी गई संख्या का अभीष्ट घनमूल होगा।

उदाहरण 1 : 1728 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$1728 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$$

$$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3$$

$$= 12$$

उत्तर

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

उदाहरण 2 : वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 210125 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन हो जाए।

हल :

210125 के अभाज्य गुणनखंड करने पर

$$210125 = \underline{5 \times 5 \times 5} \times 41 \times 41$$

अभाज्य गुणनखंड के रूप में 41 तीन बार नहीं आया है। अतः पूर्ण घन बनाने के लिए 41 से गुणा करनी होगी।

$$210125 \times 41 = 8615125$$

$$8615125 = \underline{5 \times 5 \times 5} \times \underline{41 \times 41 \times 41}$$

$$\sqrt[3]{8615125} = 5 \times 41 = 205$$

उत्तर

5	210125
5	42025
5	8405
41	1681
41	41
	1



1. निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए-

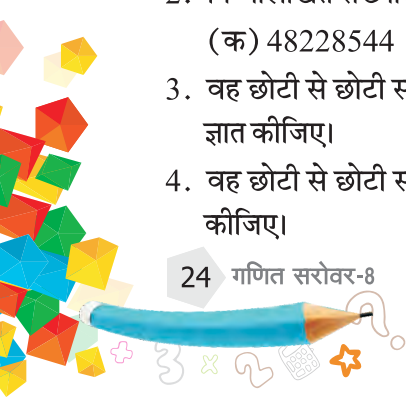
(क) 512 (ख) 1000 (ग) 1331 (घ) 3375 (ङ) 8000

2. निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए-

(क) 48228544 (ख) 74088000 (ग) 134217728

3. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 137592 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन हो जाए। प्राप्त गुणनफल का घनमूल भी ज्ञात कीजिए।

4. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 26244 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन हो जाए। प्राप्त भागफल का घनमूल भी ज्ञात कीजिए।





ऋणात्मक पूर्ण घन का घनमूल (Cube Root of a Negative Perfect Cube)

यदि a एक धनात्मक पूर्णांक है तब $-a$ एक ऋणात्मक पूर्णांक है।

$$(-a)^3 = -a \times -a \times -a = -a^3$$

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$$

किसी ऋण पूर्णांक का घनमूल ऋणात्मक होता है।

उदाहरण 1 : -1331 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt[3]{-1331} = -\sqrt[3]{1331}$

1331 के अभाज्य गुणनखंड करने पर

$$1331 = 11 \times 11 \times 11$$

$$\sqrt[3]{1331} = 11$$

$$\sqrt[3]{-1331} = -\sqrt[3]{1331} = -11$$

11	1331
11	121
11	11
	1

उत्तर

पूर्णाकों के गुणनफल का घनमूल (Cube Root of Product of Integers)

यदि x और y दो घन पूर्णांक हों,

$$\text{तब } \sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$$

उदाहरण 2 : 3375×512 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt[3]{3375 \times 512} = \sqrt[3]{3375} \times \sqrt[3]{512}$

3375 तथा 512 के अभाज्य गुणनखंड करने पर,

$$3375 \times 512 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5}_{3375} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{512}$$

$$\sqrt[3]{3375 \times 512} = 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= 120$$

उत्तर

उदाहरण 3 : -27×2744 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt[3]{-27 \times 2744} = \sqrt[3]{-27} \times \sqrt[3]{2744}$

27 तथा 2744 के अभाज्य गुणनखंड करने पर,

$$27 \times 2744 = \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{27} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{2744} \times \underbrace{7 \times 7 \times 7}_{2744}$$

$$\sqrt[3]{-27} \times \sqrt[3]{2744} = -3 \times 2 \times 7$$

$$\sqrt[3]{-27 \times 2744} = -42$$

उत्तर



प्रश्नावली-3.3

1. निम्नलिखित संख्याओं में कौन-सी संख्या ऋणात्मक पूर्णांक का घन है?

(क) -64

(ख) -2197

(ग) -1056

(घ) -3888

2. निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए-

(क) -125

(ख) -5832

(ग) -17576

(घ) -2744000





3. निम्नलिखित का घनमूल ज्ञात कीजिए-

(क) 8×64

(ख) $(-216) \times 1728$

(ग) $64 \times (-2744)$

(घ) 729×15625

(ङ) $(-125) \times (-3375)$

(च) -456533

(छ) -474552

(ज) -5832000

परिमेय संख्याओं का घन (Cube of Rational Numbers)

यदि $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या हो, तब $\left(\frac{p}{q}\right)^3 = \frac{p^3}{q^3}$

उदाहरण 1 : $\frac{3}{5}$ का घन ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5} = \frac{27}{125}$

उत्तर

उदाहरण 2 : $\frac{-2}{3}$ का घन ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{(3)^3} = \frac{(-2) \times (-2) \times (-2)}{3 \times 3 \times 3} = \frac{-8}{27}$

उत्तर

उदाहरण 3 : 1.5 का घन ज्ञात कीजिए।

हल : $1.5 = \frac{15}{10}$

$$\left(\frac{15}{10}\right)^3 = \frac{15^3}{10^3} = \frac{15 \times 15 \times 15}{10 \times 10 \times 10}$$

$$= \frac{3375}{1000} = 3.375$$

उत्तर

परिमेय संख्याओं का घनमूल (Cube Roots of Rational Numbers)

यदि p और q दो पूर्णांक हैं, तब $\left(\frac{p}{q}\right)^3 = \frac{p^3}{q^3}$

इसी प्रकार, $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{q}}$

उदाहरण 1 : $\frac{729}{1331}$ का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt[3]{\frac{729}{1331}} = \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{1331}}$

729 तथा 1331 के अभाज्य गुणनखंड करने पर,

$$\frac{729}{1331} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{11 \times 11 \times 11}$$

$$\sqrt[3]{\frac{729}{1331}} = \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{1331}} = \frac{3 \times 3}{11} = \frac{9}{11}$$

उत्तर

उदाहरण 2 : -1.331 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt[3]{-1.331} = -\sqrt[3]{1.331} = -\sqrt[3]{\frac{1331}{1000}}$





1331 तथा 1000 के गुणनखंड करने पर,

$$\frac{1331}{1000} = \frac{11 \times 11 \times 11}{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1331}{1000}} = \frac{-11}{2 \times 5} = \frac{-11}{10} = -1.1$$

उत्तर

उदाहरण 3 :

एक घनाकार बक्से का आयतन 13.824 मी³ है। बक्से की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल :

माना बक्से की भुजा की लंबाई = a मी

तब बक्से का आयतन = a^3 मी³

बक्से का आयतन = 13.824 मी³

$$\therefore a^3 = 13.824$$

$$a = \sqrt[3]{13.824}$$

$$a = \frac{\sqrt[3]{13824}}{\sqrt{1000}} = \frac{\sqrt[3]{13824}}{\sqrt[3]{1000}}$$

13824 और 1000 के अभाज्य गुणनखंड करने पर,

$$\frac{13824}{1000} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5}$$

$$a = \frac{\sqrt[3]{13824}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{24}{10}$$

$$a = 2.4 \text{ मीटर}$$

उत्तर



प्रश्नावली-3.4

1. निम्नलिखित संख्याओं का घन ज्ञात कीजिए-

(क) $\frac{7}{9}$

(ख) $\frac{-8}{11}$

(ग) $\frac{12}{7}$

(घ) $\frac{-13}{8}$

(ङ) $2\frac{3}{5}$

2. निम्नलिखित का घन ज्ञात कीजिए-

(क) 0.3

(ख) 1.5

(ग) 0.08

(घ) 2.1

3. निम्नलिखित संख्याओं में कौन-सी संख्या प्राकृत संख्याओं का घन है?

(क) $\frac{27}{64}$

(ख) $\frac{125}{128}$

(ग) 0.001331

(घ) 0.04

4. निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए-

(क) $\frac{8}{125}$

(ख) $\frac{-64}{1331}$

(ग) $\frac{27}{-4096}$

(घ) $\frac{-2197}{-9261}$

5. एक घनाकार बक्से का आयतन 32.768 मी³ है। बक्से की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।



सारांश



- किसी घन संख्या में, संख्या की घात तीन होती है।
- ऋणात्मक पूर्णांक का घन ऋणात्मक होता है।
- परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ का घन $\frac{p^3}{q^3} = \left(\frac{p}{q}\right)^3$ होता है।
- किसी सम प्राकृत संख्या का घन सम होता है।
- किसी विषम प्राकृत संख्या का घन विषम होता है।
- किसी धनात्मक पूर्णांक a के लिए हम जानते हैं- $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$ प्राप्त होता है।
- $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}$
- किसी प्राकृत संख्या n को किसी संख्या m का घनमूल कहते हैं, यदि $n^3 = m$ हो।
- परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ का घनमूल $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{q}}$ होता है।

बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQs)

1. $3^3 + 3^3 + 3^3 = ?$
(क) 3^4 (ख) 9^3 (ग) 3^9 (घ) 27^3
2. निम्नलिखित संख्याओं में से कौन-सी एक पूर्ण घन नहीं है?
(क) 27 (ख) 125 (ग) 216 (घ) 100
3. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या पूर्ण घन है?
(क) 80 (ख) 800 (ग) 8000 (घ) कोई नहीं
4. 0.000008 का घनमूल है-
(क) 2 (ख) 0.2 (ग) 0.02 (घ) 0.008

बौद्धिक गणित (Mental Maths)

$\sqrt[3]{15625}$ का मान ज्ञात कीजिए।

